

システム基礎科学実験 I

パソコン信号処理 I

実験日 : 平成16年7月6・13日
グループ : F
学籍番号 : 40413
氏名 : 諸町大地
共同実験者 : 本間大士・三瓶雅迪

1. 目的

計測により得られたアナログ信号を A/D コンバーターでデジタル信号に変換し、その中からノイズを取り除き、原波形を求める方法について学ぶ。

2. C 言語の基礎

デジタル信号を処理するに当たり、C 言語を用いる。まず、C 言語の復習をするため、実験プリント p. 2 の課題をといた。

課題

作成したプログラムは以下のとおりである。

```
#include<stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 100

main(){
    int j;
    FILE *fout=fopen("tes0100.txt","w");
    for(j=0;j<10;j++){
        double r[N];
        double sum, sum2, e, v;
        int i;
        sum=0; sum2=0;
        for(i=0;i<N;i++){
            r[i]=(double)rand()/RAND_MAX;
            sum=sum+r[i];
            sum2=sum2+r[i]*r[i];
        }
        e=sum/N;
        v=sum2/N-e*e;
        fprintf(fout,"%f:%f¥n",e,v);
    }
}
```

このプログラムの実行結果を次に示す。

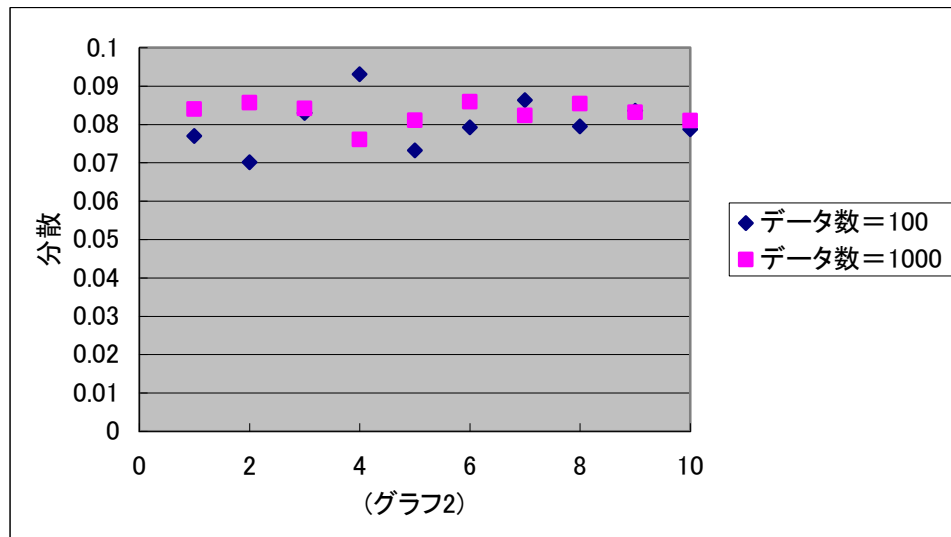
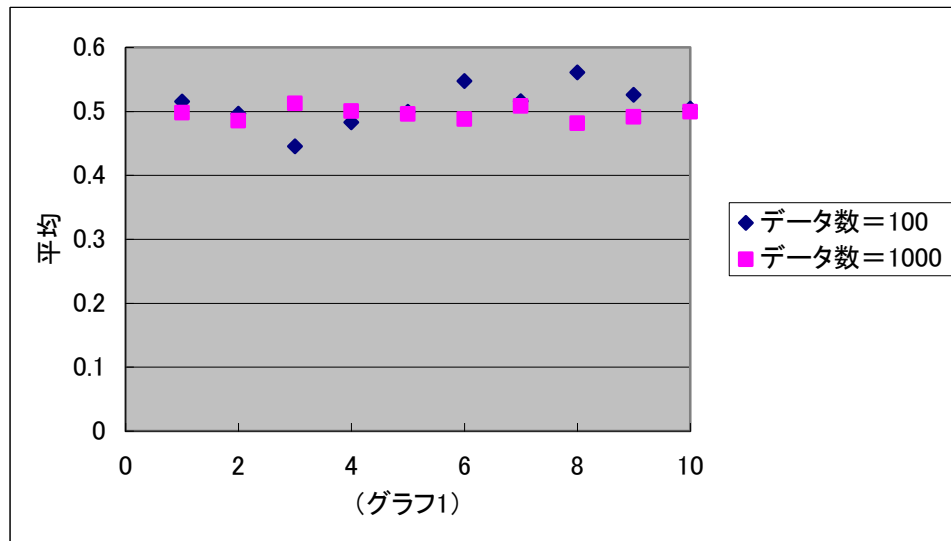
```
0.515489:0.076967
0.496179:0.070131
0.445015:0.082943
0.483010:0.093061
0.499098:0.073174
0.547197:0.079238
0.515723:0.086295
0.561050:0.079493
0.525938:0.083584
0.504385:0.078699
```

また、このプログラムの 3 行目・7 行目をそれぞれ、「`#define N 100`」・「`FILE *fout=fopen("tes1000.txt","w");`」に書き換え実行したものを次に示す。

```
0.497740:0.083965
0.485494:0.085642
0.512215:0.084129
0.500402:0.076064
0.495679:0.081091
0.487945:0.085922
0.508531:0.082345
0.481355:0.085383
0.491087:0.083163
0.499288:0.080978
```

これらの結果は、7 行目で定義されるサンプリング数だけ発生させた擬似乱数の平均値と分散を求めることを 10 回繰り返した結果である。ただし、あくまで擬似乱数であり、このプログラムを何度実行しても同じ結果しか得られない。本来は `rand()`関数を用いる前に、`srand()`関数を呼び出し、乱数ジェネレーターを初期化すべきであるが、今回のこの課題を解くに当たっては特に問題がないと思われる。

この結果より、データ数の違いによる差異を調べる。まず、平均値をプロットしてみると、グラフ 1 のようになる。データ数に関わらず、平均値は当然のごとく 0.5 付近に集まる。しかし、その集まりぐあいには差があり、データ数が小さいほど散らばりが大きい。同様に、分散についてもプロットすると、グラフ 2 のようになる。平均と同じように、データ数が小さいほど散らばり具合が大きいことがわかる。よって、データ数が多ければ多いほどより正確なデータが得られることになる。



4. データサンプリングの基礎

4-1 入力波形の取り込み・表示

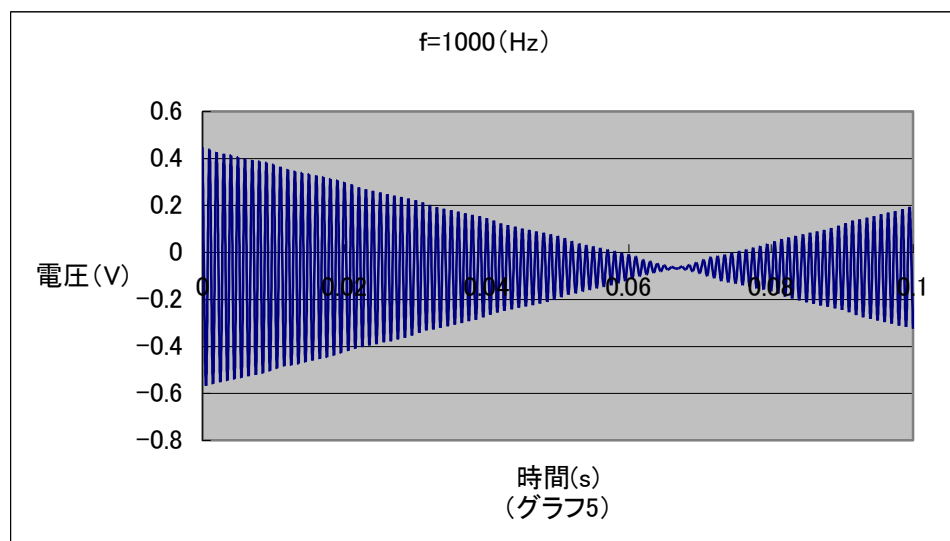
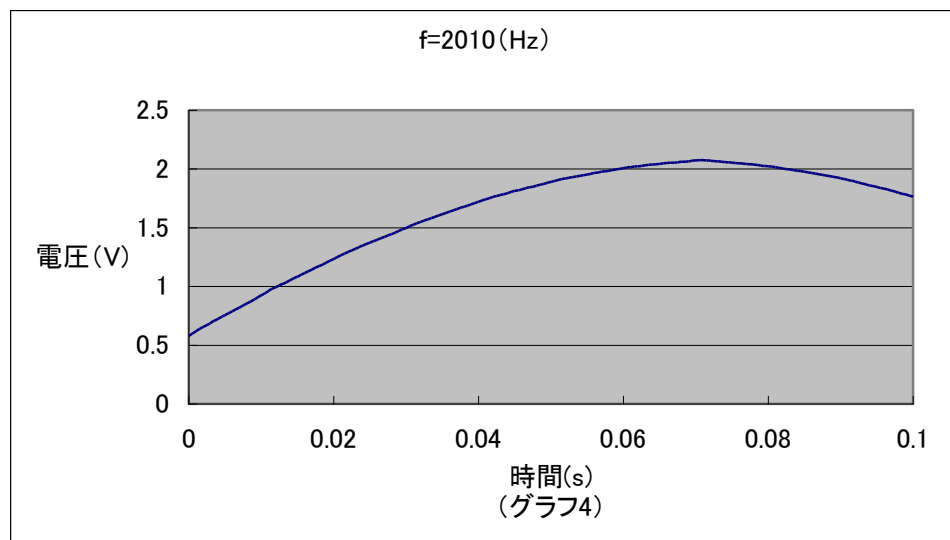
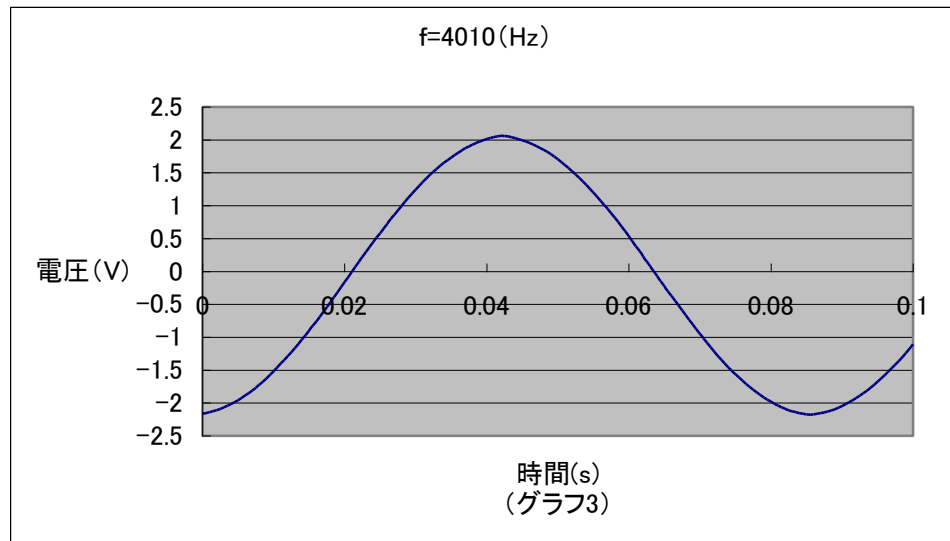
FG から 10Hz の正弦波を入力した。

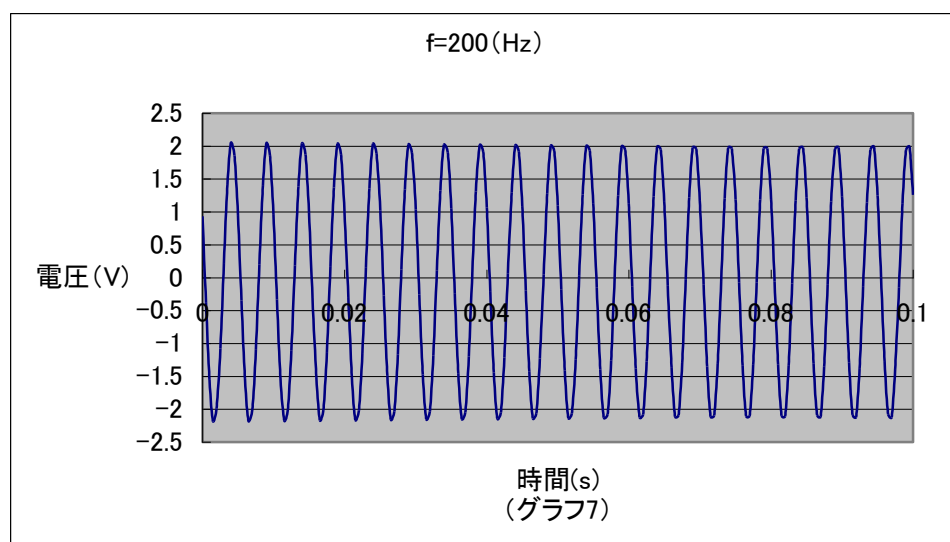
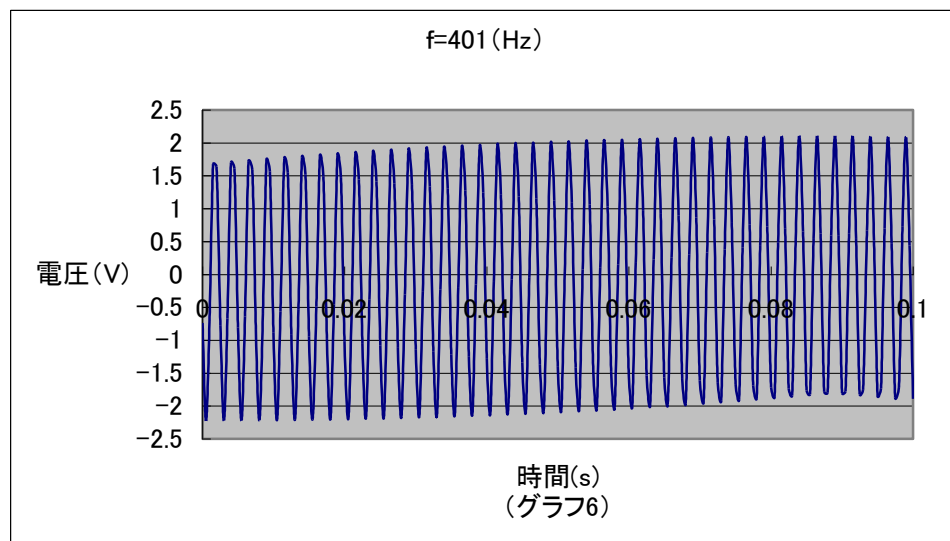
① コンピュータディスプレイの表示と、オシロスコープの表示を比べ、正しく取り込まれていることを確認した。

② 入力波形 1 周期中のデータ数をカウントし、サンプリング間隔を求めた。サンプリング間隔は”globals.h”中の clk によって設定されており、これを変更することでサンプリング間隔が変更できることが確かめられた。サンプリング間隔 = $1/\text{clk}(\text{s})$ である。

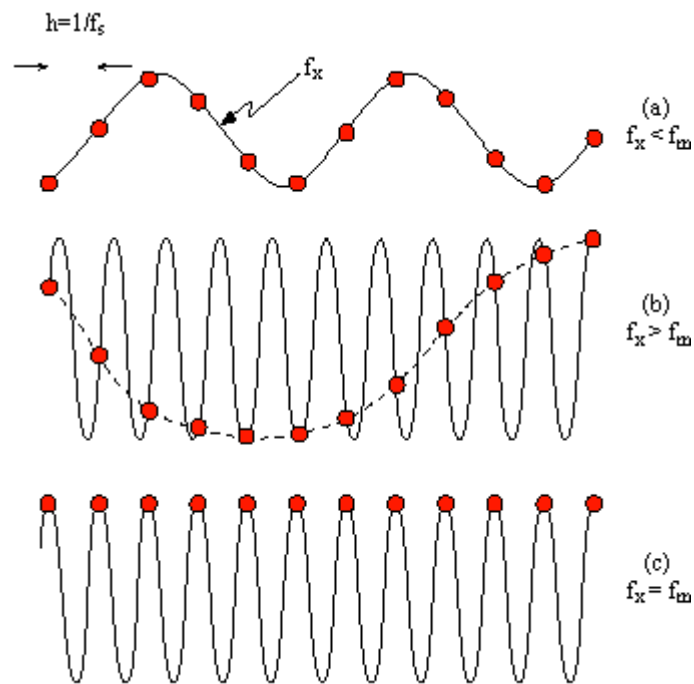
4-2 データサンプリングと入力周波数

① サンプリング間隔を 0.0005(s) とし、周波数 4010Hz・2010Hz・1000 Hz・401 Hz・200 Hz の正弦波をそれぞれ入力し測定した。その結果をグラフ 3～7 に示す。





グラフ 3～7 を見ると、明らかに入力波形を示していないグラフが得られているのがわかる。グラフ 7 は 0.1 秒間の中にグラフの谷が 20 個あり、確かに $f=200\text{Hz}$ の正弦波を表し、正しいといえる。また、グラフ 6 は頂点の位置が下がっている部分が多いが、周期の数はあっており、おおよそ正しいといえる。しかし、グラフ 3～5 にかけては全く持って入力波形を表せていない。これはデータの取り込みに失敗したのではなく、入力波形の周期がサンプリング間隔より小さいため起きる現象である。この現象の模式図を以下に示す。ただし、図中の f_m はサンプリングの周波数を、 f_x は入力波の周波数をしめす。



(図 1)

②入力電圧が振動を起こしていることを示すには、最低でも、1 周期の上半分に位置する点と、下半分に位置する点の 2 箇所はプロットしなければならない。しかしそれでは三角波となることが確実である。また、グラフ 5 のようにうなりを生じやすくなる。そのため、サンプリング間隔が周期の半分では実用的ではない。よって、1 周期中 4 点以上をプロットするのが良いと思われる。1 周期中 4 点以上プロットできれば、山と谷の部分のそれぞれに 2 点以上プロットできるので、かなり入力波形に地被くはずである。よって、実用上有効となるサンプリング間隔は入力電圧の周期の 4 分の 1 以下である。もちろんサンプリング間隔は狭ければ狭いほど再現率はよくなる。

5. パソコンによる信号処理

5-1. 統計学的処理の基礎

問題 1

$$\mu = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}$$

問題 2

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2}$$

問題 3

正確な測定：間違いのない、正しい測定。

精密な測定：細かな値にまで注意を払った測定。

精密な測定を行なうことは正確な測定に近づくが、必ずしも正確な測定となるわけではない。例えば電圧を測るのに、有効数字を多く取り、精密な測定を行なっても、電圧を測る位置を間違っていてはもちろん正確な測定とはならない。

問題 4

密度関数を $f(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} & E\{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n\} \\ &= \sum_x (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n) f(x) \\ &= a_1 \sum X_1 f(x) + a_2 \sum X_2 f(x) + \cdots + a_n \sum X_n f(x) \\ &= a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \cdots + a_n E(X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V\{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n\} \\ &= \sum_{k=1}^n V(a_k X_k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 V(X_k) \end{aligned}$$

よって示せた。

問題 5

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n} \cdot n\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\bar{X}) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

問題 6

正規分布とは確率分布関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

となる確立である。(ただし、 μ :平均、 σ :分散の平方根)

また、

$$\begin{aligned}
1 - P\left(Z \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

問題 7

X が平均 μ 、標準偏差 σ のある分布に従うならば、大きさ n の無作為標本に基づく標

本平均 \bar{X} は、 n が無限に大きくなるとき、平均 μ 、標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の正規分布に近づく。

問題 8.

まず、

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ \sigma_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)^2 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - c}{h}\right) \\
&= \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{c}{hn} \sum_{k=1}^n 1 \\
&= \frac{\bar{x}}{h} - \frac{c}{h}
\end{aligned}$$

$$\therefore \bar{x} = c + h\bar{y}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - c}{h} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k - c}{h} \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{2c}{h^2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{c^2}{h^2} - \frac{\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 \right) - \frac{2c\bar{x}}{h^2} + \frac{2c\bar{x}}{h^2} + \frac{c^2}{h^2} - \frac{c^2}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \sigma_x^2\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_x^2 = h^2 \sigma_y^2$$

よって示せた。

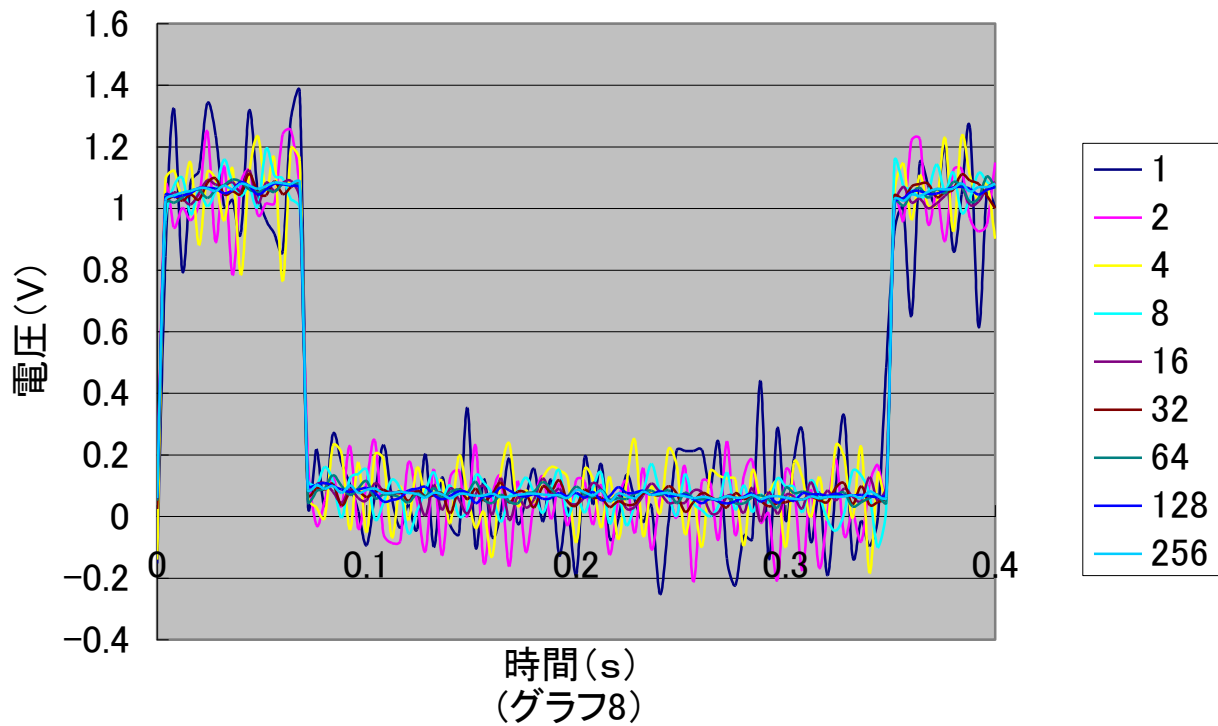
5-2. 模擬信号の処理

(実験)

nave を 1,2,4,8,16,32,64,128,256 と変えながら、測定を繰り返した。

(結果)

nave=1,2,4,8,16,32,64,128,256 のそれぞれについての平均電圧の測定結果をグラフ 8 にまとめて表示する。



(考察)

①グラフ 8 の $nave=256$ を見ると、L の区間の長い矩形派であることがわかる。L の区間の長さが、目測ではあるが、H の区間の長さの 3 倍、である。よって、ブラックボックス内の正体は 4 進カウンタであると推測できる。

②グラフ 2 同様の变化を示した。つまり、 $nave$ が小さければ分散の値は大きく散らばるが、 $nave$ が大きくなるに従い、0.3 付近に集まってくるということがわかる。